Leçon 220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

RM
2022-2023

Soit $\mathbb{K}$ un corps qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Équations différentielles ordinaires

1.1 Définitions et première propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f : \Omega \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : Une équation différentielle résolue par rapport à la dérivée est de la forme $y' = f(t,y)$. Une solution est une fonction dérivable y sur I telle que $y' = f(t,y)$ pour tout t dans I.

Exemple 2 : La fonction $y(t) = t^2$ est une solution des équations différentielles $y' = 2t, ty' - 2y = 0, (y')^2 - 4y = 0$.

Définition 3 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^N)^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$. Une équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$ est de la forme $y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{[n-1)})$.

Remarque 4 : Si $N = 1$, on parle d'équation différentielle scalaire. Sinon d'équation différentielle vectoriel.
Il est important de préciser sur quel intervalle I une fonction y est solution.
On parle d'équation différentielle ordinaire pour indiquer que la fonction inconnue y dépend d'une seule variable réelle t.

Proposition 5 : En considérant $Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, l'équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^n$ est équivalente à l'équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^{nN}$ suivante : $Y' = F(t,Y)$ avec $F(t,Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{(n-1)} \\ f(t,Y) \end{pmatrix}$.

Remarque 6 : Cela nous permet de nous concentrer sur la résolution des équations différentielles d'ordre 1. On sa ramène donc à l'équation différentielle $y' = f(t,y)$.

Exemple 7 : On ramène l'équation différentielle $y'' = yy' - ty^3$ sous la forme $Y' = f(t,Y)$ en posant $Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $F(t,Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_0Y_1 - tY_0^3 \end{pmatrix}$.

Définition (Problème de Cauchy) 8 : Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Le problème de Cauchy avec donnée initiale (t_0, y_0) consiste à trouver les solutions de $y' = f(t,y)$ sur un intervalle I telle que $t_0 \in I$ et $y(t_0) = y_0$, appelé condition initiale.

Exemple 9 : La fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = 2e^{-t}$ est une solution de l'équation différentielle $y' + y = 0$ avec la condition de Cauchy $y(0) = 2$.

Définition 10 : Une solution y est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement stricts (autre qu'elle même).
Une solution y est dite globale si dans le cas $\Omega = I \times \Omega'$, alors y est définie sur I.

Proposition 11 : Une solution globale est maximal. La réciproque est fausse en générale.

Exemple 12 : La fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(t) = e^t$ est une solution globale, donc maximal, pour l'équation différentielle $y' = y$.

Remarque 13 : La question de l'unicité, par exemple dans le problème de Cauchy, nécessite de considérer alors les solutions maximales, car la restriction d'une solution est solution.

Proposition 14 : Soit a une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. La solution maximal (et définie sur I donc globale) de l'équation différentielle $y' = a(t)y$, avec $y(t_0) = y_0$ est $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}$.

1.2 Existences et unicités des solutions maximales

Définition 15 : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable si pour tout $(\tilde{t}, \tilde{y}) \in \Omega$, il existe $C_0 = [\tilde{t} - T, \tilde{t} + T] \times B_f(\tilde{y}, r)$ avec $T, r > 0$et $k \geq 0$ tels que pour tout $(t, y_1), (t, y_2) \in C_0$, on a $\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz locale) 16 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue et localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une solution maximal et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ telle que $y(t_0) = y_0$. De plus, l'intervalle I est ouvert.

Définition 17 : Soit $\Omega = I \times X$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $X \subset \mathbb{K}^N$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ est dite globalement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, uniformément par rapport à la première variable, si pour tout intervalle compact $J \subset I$, il existe $k > 0$ tel que pour tous $(t, y_1), (t, y_2) \in J \times X$, on a $\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k\|y_1 - y_2\|$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz Globale) 18 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$ continue et globalement lipschitzienne par rapport à la seconde variable et uniformément par rapport à la première. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une solution globale et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire) 19 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une solution et une seule $y : I \to \mathbb{K}^N$ de $y' = A(t)y + B(t)$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Exemple 20 : Soit $y' = t^2 e^y$. Comme $f(t, y) = t^2 e^y$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est continue et localement lipschitzienne. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne l'existence et l'unicité d'une solution maximal sur I avec $y(t_0) = y_0$.

1.3 Prolongement des solutions, passage du maximal au global

Lemme (de Gronwall) 21 : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $a \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Supposons $u, v \geq 0$ et que, pour tout t de i, on ai $u(t) \leq a + \left|\int_{t_0}^t v(s)u(s)ds\right|$. Alors pour tout t de I, on a $u(t) \leq ae^{\left|\int_{t_0}^t v(s)ds\right|}$.

Lemme 22 : Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz locale, si x et y sont deux solutions, définie sur un intervalle I, qui coïncident en un point de I, alors elles coïncident sur tout I.

Théorème (d'explosion en temps finie) 23 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue et localement lipschitzienne. Soit $y :]c, d[\to \mathbb{K}^N$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Alors $(t, y(t))$ sort de tout compact de Ω quand $t \to d$. Plus précisément, pour tout compact K inclus dans Ω, il existe un voisinage V de d tel que $(t, y(t)) \notin K$ pour tout $t \in V$. De même quand $t \to c$.

Corollaire (Théorème des bouts) 24 : Soient $\Omega =]a, b[\times \mathbb{K}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ continue, localement lipschitzienne. Soit $y \in]c, d[\to \mathbb{K}^N$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$. Si $d < b$, alors on a $\|y(t)\| \underset{t \to d}{\to} +\infty$. Ceci veut dire aussi que si $t \mapsto y(t)$ est bornée, alors $d = b$.

Proposition 25 : Soit $]a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$. soit $f :]a, b[\times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et localement lipschitzienne. Si on suppose que f est bornée, alors toute solution maximale de $y' = f(t, y)$ est globale.

2 Résolutions d'équations différentielles

2.1 Équations différentielles linéaires

On cherche à résoudre les équations différentielles de la forme $y' = A(t)y + B(t) = f(t, y)$ ou $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$ avec $A \in \mathcal{C}(I, M_N(\mathbb{K}))$ et $B \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$, $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$.

Proposition 26 : L'ensemble S_H des solutions maximales de $y' = A(t)y$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K}^N)$ de dimension N.
L'ensemble S des solutions de $y' = A(t)y + B(t)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

Proposition 27 : Si $N = 1$, alors la solution maximal (et définie sur I donc globale) de $y' = a(t)y + b(t)$, avec $y(t_0) = y_0$ est $y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds$.

Exemple 28 : La solution de l'équation différentielle réelle $y' + y = e^t$ avec $y(1) = 0$ est $y(t) = \frac{e^t - e^{-t+2}}{2}$.

Proposition 29 : Si $A \in M_N(\mathbb{K})$ est constante, alors une solution de $y' = Ay$ est de la forme $y(t) = e^{tA}C$ où C est un vecteur constant de $\mathbb{K}^N$. Avec $y(t_0) = t_0$, on obtient la solution $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$.

Exemple 30 : La solution de $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ avec $x(1) = 2$ et $y(1) = 1$ est : $x(t) = 1/2(3e^{3(t-1)} + e^{-(t-1)})$, $y(t) = 1/2(3e^{3(t-1)} - e^{-(t-1)})$.

Proposition 31 : La solution de l'équation différentielle $y' = Ay + B(t)$ avec $y(t_0) = y_0$ est de la forme $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds$.

2.2 Équations différentielles particulières

Définition 32 : On appelle équations de Bernoulli les équations différentielles du type $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ différent de 0 et 1 et a, b deux fonctions continues de J dans $\mathbb{R}$.

Proposition 33 : Pour résoudre cette équation, on pose $z = y^{1-\alpha}$ et on obtient que $\frac{1}{1-\alpha}z' = a(t)z + b(t)$. On est ainsi ramené à une équation linéaire d'ordre 1 que l'on sait résoudre.

Remarque 34 : Si $\alpha > 0$, alors la fonction nulle est solution. Si de plus $\alpha \geq 1$, alors

Cauchy-Lipschitz nous assure qu'aucune autre solution ne s'annule. Si $0 < \alpha < 1$, on peut faire des raccords de classe $\mathcal{C}^1$ avec la solution nulle.

Définition 35 : On appelle équations de Ricatti les équations différentielles de la forme $y' = a(t)y^2 + b(t) + c(t)$ avec a, b, c des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 36 : Si on connaît une solution particulière φ_0, on sait résoudre cette équation différentielle. On pose $y = \varphi_0 + z$ et on obtient $z' = [2a(t)\varphi_0(t) + b(t)]z + a(t)z^2$, qui est une équation de Bernoulli.

Remarque 37 : D'après la remarque précédente, on a que comme z ne s'annule jamais, on peut poser $z = 1/u$ et on se ramène à une équation différentielle du premier ordre.

2.3 Utilisation des séries entières

Remarque 38 : Il peut parfois être judicieux de considérer que les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions développable en série entières. C'est à considérer si les fonctions coefficients sont des polynômes.

Exemple 39 : Pour l'équation différentielle $(t^2+1)y''+(3t+1)y'+y = 0$, en cherchant une solution développable en série entière, on trouve que la fonction $t \mapsto c/(1+t)$ est une solution sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3 Étude qualitative

Remarque 40 : Comme on peut pas toujours trouver les solutions d'un équation différentielle, on s'intéresse aux propriétés des solutions ou leur trajectoire.

3.1 Équations autonomes

Définition 41 : Une équation différentielle autonome est une équation différentielle de la forme $y' = f(y)$ où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$.

Définition 42 : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ continue, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$. La trajectoire d'une solution maximale $y : I \to \mathbb{R}^N$ de $y' = f(y)$ est l'ensemble $\{y(t), t \in I\}$.

Définition 43 : Une fonction $E : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est appelée intégrale première de $y' = f(y)$ si pour toute solution y, on a $E'(y(t)) = 0$.

Développement 44 : On considère le système suivant dit proies-prédateurs de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

Dev 1

Avec $a, b, c, d > 0$ et comme condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ tel que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
Alors ce système de Cauchy admet une solution maximal global et périodique.De plus, nous pouvons prédire l'allure de la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$

3.2 Stabilité des solutions

Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{K}^N$ et $f : I \times \Omega' \to \mathbb{K}^n$ continue et localement lipschitzienne. On s'intéresse à $y' = f(t, y)$. Soit y_{t_0,y_0} sa solution maximale pour $y(t_0) = y_0$.

Définition 45 : La solution y_{t_0,y_0} est stable à droite si :

i) Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y_1 \in \Omega'$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \alpha$, la fonction $y_{t_0,y_1}(t)$ est définie pour tout $t \geq t_0$.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, \alpha]$ tel que, pour tout $y_1 \in \Omega'$, si $\|y_1 - y_0\| \leq \eta$, alors $\|y_{t_0,y_1}(t) - t_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

Définition 46 : La solution y_{t_0,y_0} est dite asymptotiquement stable à droite si elle est stable à droite et attractive à droite, ie s'il existe $\delta > 0$ tel que $y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $y_1 \in \Omega'$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \delta$.

Remarque 47 : On peut aussi définir la stabilité à gauche, mais on s'intéresse physiquement quand on avance dans le temps.
La notion de stabilité peut se comprendre en disant qu'une solution est stable si de petites perturbations de la donnée initiale conduisent à de faibles variations des valeurs de la solution pour des temps ultérieurs.

Théorème 48 : Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$. Notons λ_i les valeurs propres de A. Les solutions de $y' = Ay$ sont :

i) stable si et seulement si pour tout i, $Re(\lambda_i) < 0$ ou $Re(\lambda_i) = 0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable.

ii) asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda_i) < 0$ pour tout i.

Lemme 49 : Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que, pour tout t positif ou nul, on ait $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$.

Théorème 50 : Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On suppose que la matrice Df_0 (matrice de la différentielle de f en 0) a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Alors 0 est un point d'équilibre stable du système : pour tout y_0 suffisamment proche de 0, la solution maximal $y(t)$ est bien définie sur $[0, +\infty[$ et tend exponentiellement vite vers 0 quand $t \to +\infty$.

Dev 2

Références :

1. Analyse Gourdon
2. Équations différentielles Berthelin.
3. Analyse ZQ
4. Calcul différentielle rouvière
5. isenmann (rip)